University of Education
Ecole Supérieure de Pédagogie
karlsruhe

Das HERON-Verfahren

$$\sqrt[k]{a}$$

mit Wolfram Mathematica

Referent: Jens Wurster
Fächer: Technik, Informatik, Mathematik
Lehramt: Grund- und Hauptschule
Semester: 3

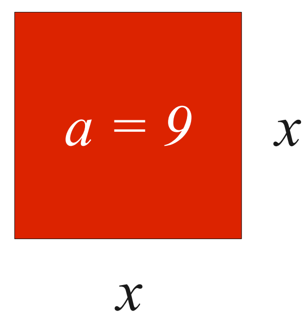
Einstieg

Wie bestimmt der Taschenrechner den Wert $\sqrt{9} = 3$?

Wie kann man nur mit Grundrechenarten
die Wurzel bestimmen?

Verfahren

Wir bestimmen mit dem **HERON-Verfahren** näherungsweise die Wurzel aus 9.



Ziel: Gesucht ist die Seitenlänge x eines Quadrates mit dem Flächeninhalt a.

$$x = \sqrt{9}$$

1. Iteration

$a = 9$

$y_0 = 1$

$x_0 = 9$

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$$

$$y_1 = \frac{a}{x_1}$$

2. Iteration

$a = 9$

$y_1 = 1{,}8$

$x_1 = 5$

$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

$$y_2 = \frac{a}{x_2}$$

3. Iteration

$a = 9$

$y_2 = 2{,}647$

$x_2 = 3{,}4$

$$x_3 = \frac{x_2 + y_2}{2}$$

$$y_3 = \frac{a}{x_3}$$

4. Iteration

$a = 9$

$y_3 = 2{,}977$

$x_3 = 3{,}024$

Notebook

Programmname
a_: Radikand

Variablen
x: Breite des Rechtecks (Ausgangswert: Radikand)
y: Höhe des Rechtecks (Ausgangswert: 1)

```
In[1]:= Heron[a_] :=
  Module[{x = a, y = 1},
   While[Abs[x - y] > 0.0000000001,
    Print[{N[x], N[y]}];
    x = (x + y) / 2;
    y = a / x
   ]
  ]
```

while-Schleife
Iteriert so lange, bis die Höhe und Breite nahezu identisch sind.

Ausgabe
Derzeitige Breite und Höhe.

Berechnung
Neue Breite und Höhe.

Alternative mit **do-Schleife** → Anzahl der Iterationen müssen angegeben werden.

Ausgabe zum Notebook

```
In[2]:= Heron[9]
{9., 1.}
{5., 1.8}
{3.4, 2.64706}
{3.02353, 2.97665}
{3.00009, 2.99991}
{3., 3.}
```

Ausgabe mit grafischer Darstellung

```
In[1]:= Heron[a_] :=
  Module[{x = a, y = 1},
   While[Abs[x - y] > 0.0000000001,
    Print[Graphics[{Red, Rectangle[{0, 0}, {x, y}]},
      Frame → True, FrameLabel → {"x", "y"}, RotateLabel → False,
      PlotLabel → {N[x], N[y]}, PlotRange → {{0, a}, {0, 8}},
      PlotRangePadding → 1]];
    x = (x + y) / 2;
    y = a / x
   ]
  ]
```

Verkürzung der Formel

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$$

$$y_1 = \frac{a}{x_1}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

Variablen
x: Gesuchte Wurzel (Ausgangswert: Radikand)

```
In[1]:= Heron[a_] :=
  Module[{x = a},
   While[Abs[x^2 - a] > 0.0000000001,
    x = (x + a / x) / 2
   ];
   Return[N[x]]
  ]
```

Berechnung
Berechnung der Wurzel in verkürzter Form.

while-Schleife
Iteriert so lange, bis die Flächen nahezu identisch sind.

Ausgabe zum Notebook

```
In[2]:= Heron[9]

        3.
```

Verallgemeinerung (*k*-te Wurzel)

Variablen

$k = 2$ (Wurzelexponent)

$a = 9$ (Radikand)

$x = a$ (Breite)

$y = 1$ (Höhe)

2-te Wurzel

$$x = \frac{x + y}{2}$$

$$y = \frac{a}{x}$$

3-te Wurzel

$$x = \frac{x + x + y}{3}$$

$$y = \frac{a}{x^2}$$

k-te Wurzel

$$x = \frac{(k-1)x + y}{k}$$

$$y = \frac{a}{x^{k-1}}$$

Programmname
k_: Wurzelexponent
a_: Radikand

Variablen
x (Ausgangswert: Radikand)
y

```
In[1]:= Heron[k_, a_] :=
  Module[{ x = a, y},
   y = N[a / x^(k - 1)];
   While[Abs[x^k - a] > 0.000001,
    x = ((k - 1) * x + y) / k;
    y = a / x^(k - 1)
   ];
   Return[x];
  ]
```

Berechnung
Ausgangswert für y.

while-Schleife
Iteriert so lange, bis Annäherung an Radikand bei 0.00001.

Berechnung
Neuer x- und y-Wert.

Ausgabe zum Notebook

```
In[2]:= Heron[5, 123456]

Out[2]= 10.4304

In[3]:= %^5

Out[3]= 123456.
```

Schlussdarstellung

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)\,x_n^k + a}{k x_n^{k-1}}$$

```
In[1]:= Heron[k_, a_] :=
         Module[{ x = a},
          While[Abs[x ^ k - a] > 0.000001,
           x = N[((k - 1) * x ^ k + a) / (k * x ^ (k - 1))]
          ];
          Return[x]
         ]

In[2]:= Heron[5, 123456]

Out[2]= 10.4304

In[3]:= % ^ 5

Out[3]= 123456.
```

Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit!